CÁLCULO FRACCIONARIO EN EL MODELAMIENTO DE ASFALTOS

David Alejandro Escobar Jiménez, Alejandro Pérez Riascos

Universidad Mariana
Pasto, Colombia

Resumen

El concepto de derivada fraccionaria hace referencia a derivadas con un orden que no entero, esta es una marcada diferencia con el cálculo tradicional y que conlleva a todo un campo de las matemáticas denominado cálculo fraccionario. Diferentes sistemas físicos son descritos de manera apropiada por medio de este formalismo, en particular el modelamiento de sistemas viscoelásticos, la difusión en medios porosos, el estudio de materiales complejos, el análisis de vibraciones en estructuras, entre muchos otros.

En este trabajo se explora la aplicación del cálculo fraccionario en el modelamiento del comportamiento viscoelástico de asfaltos y otros materiales de interés en ingeniería. Se presenta una breve revisión del concepto de derivada fraccionaria y como esta puede describir procesos físicos de carácter no local. A nivel de propuesta pedagógica, se muestra como el concepto de derivada fraccionaria se puede introducir en las materias de un programa de ingeniería civil con el fin de reforzar los conocimientos adquiridos y ampliar los métodos matemáticos para el modelamiento de materiales en ingeniería.

Palabras clave: derivada fraccionaria; medios viscoelásticos; asfaltos

Abstract

The concept of fractional derivative refers to a non-integer order derivative; this is a marked difference with the traditional calculus leading to a whole field of mathematics denominated fractional calculus. Different physical systems are appropriately described by this formalism, in particular the modeling of viscoelastic systems, the diffusion in porous media, the study of complex materials, the analysis of structural vibrations, among others.

In this paper we explore the application of fractional calculus in the modeling of viscoelastic behavior of asphalt and other materials of interest in engineering. We present a brief review of the concept of fractional derivative and how it describes nonlocal physical processes. As a pedagogical approach, we show how the concept of fractional derivative can be introduced in the civil engineering program in order to sharpen the knowledges acquired and broaden the mathematical methods for modeling materials in engineering.

Keywords: *fractional derivative; viscoelastic media; asphalts*

1. Introducción

El cálculo fraccionario es una teoría cuyos fundamentos se empezaron a indagar desde los inicios del cálculo ordinario, inicialmente como una crítica a la notación de Leibniz de derivada y más adelante alcanzó una estructura matemática convincente gracias a la contribución de matemáticos de renombre como Riemann, Liouville y Abel (Oldham et al, 1974). Este formalismo matemático encuentra aplicaciones en diferentes áreas de la física, la química, la biología, entre otras (Podlubny, 1998; Das, 2014; Baleanu, 2011). En el cálculo ordinario, la aplicación sucesiva de los operadores de derivación e integración sugiere solo valores enteros n para el orden de esta operación, una unidad por cada vez que se aplica el operador. No obstante, se puede obtener una expresión general para estos operadores y proponer, además, un valor arbitrario α para dicho orden (Podlubny, 1998). Es así como surge el cálculo fraccionario para estudiar las derivadas e integrales de orden arbitrario α. El cálculo fraccionario ha recorrido un camino casi tan extenso como el del cálculo ordinario, recientemente son muchas las áreas de la ciencia que se han ido interesando por este campo (Podlubny, 1998; Das, 2014; Baleanu, 2011).

En este trabajo se presenta de manera introductoria el concepto de derivada fraccionaria y como este formalismo se introduce en el estudio de materiales viscoelásticos, en particular, el modelamiento de asfaltos. Finalmente se hace énfasis en cómo este tipo de teorías pueden ser exploradas en la formación de pregrado en ingeniería con el fin de tener conocimientos sólidos en etapas avanzadas en los que la investigación tiene una componente importante.

2. Derivadas Fraccionarias

2.1 Derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y de Caputo

En esta sección se presentan las definiciones más importantes de derivada fraccionaria como lo son las definiciones de Riemann-Liouville (Podlubny, 1998) y de Caputo (Diethelm, 2010). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función $f(t)$ se denota por $\;_aD_t^\alpha f(t)$ y para los propósitos de este trabajo se usa la siguiente definición (Podlubny, 1998):

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1} $$

donde a y t son valores reales que denotan los límites en los que se debe incluir información de $f(t)$ con el fin de evaluar la derivada, n es el mayor entero que satisface $n-1 \leq \alpha < n$, y $\Gamma(z)$ denota a la función gamma (Podlubny, 1998). Debido a que la derivada (1) se encuentra definida por medio de una integral, que depende de los valores que la función asuma en el intervalo de integración, se dice que es un operador no local. Por otra parte, en la referencia (Podlubny, 1998) se demuestra esta derivada se encuentra relacionada con la derivada de orden entero de tal manera que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se reduce a la derivada de orden entero n cuando $\alpha = n$, ${}_aD_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$. También es importante señalar que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es una operación lineal y que puede aplicarse a funciones de varias variables, sustituyendo la derivada entera ordinaria $\frac{d^n}{dt^n}$ por la respectiva derivada parcial.

En la Figura 1 se presenta la derivada de Riemann-Liouville para diferentes funciones típicas en matemáticas e ingeniería. Se observa como las derivadas fraccionales ofrecen un espectro más amplio que las derivadas enteras, lo que permite mejorar la precisión en la descripción de algunos fenómenos físicos, en particular fenómenos que incorporan información del sistema en un intervalo y no solo pequeñas variaciones infinitesimales, como es el caso de la derivada tradicional de orden entero. Los resultados fueron obtenidos por medio de métodos numéricos.

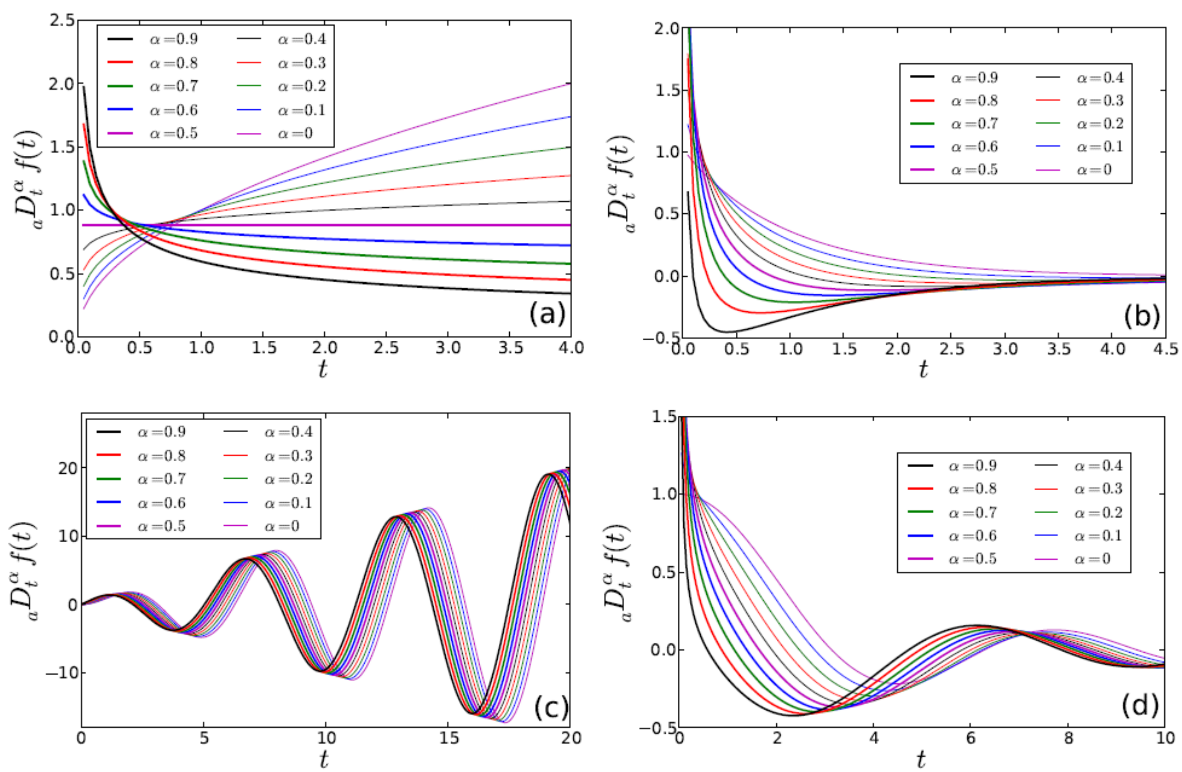

Figura 1. Gráficas de la derivada de Riemann-Liouville $_{a}D_{t}^{\alpha}f(t)$ con $a=0$ y $0\leq\alpha<1$, de diferentes funciones $f(t)$. (a) $f(t)=\sqrt{t}$. (b) $f(t)=e^{-t}$. (c) $f(t)=t\sin t$. (d) $f(t)=\sin t/t$. Se observa que entre las derivadas enteras de orden 0 y 1 existe un continuo de derivadas fraccionarias lo que amplía la percepción tradicional del concepto tradicional de derivada.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se ha desarrollado con una formulación para usos estrictamente matemáticos, sin embargo, existen ciertas áreas de las ciencias naturales y aplicadas en las cuales dicha definición requiere de una revisión (Podlubny, 1998). No obstante, se han acumulado una serie de trabajos, especialmente en la teoría de viscoelasticidad (Schiessel et al, 1995) y de sólidos mecánicos (Uchaikin, 2009) en donde las derivadas fraccionales son usadas para mejorar la descripción de las propiedades de los materiales estudiados. El modelamiento matemático conduce a ecuaciones diferenciales de orden fraccional y a la necesidad de formular las condiciones iniciales para tales ecuaciones que tengan una interpretación física conveniente. No obstante, la derivada dada por la definición de derivada de Riemann-Liouville conduce a unas condiciones iniciales que dependen del valor límite inferior $t=a$ y pese a que el problema de valores iniciales con tales condiciones iniciales ya se ha resuelto, dichas soluciones no tienen una interpretación física (Podlubny, 1998). Esto motiva a la introducción de otro tipo de derivada fraccionaria.

La propuesta de derivada fraccionaria de Caputo es (Diethelm, 2010):

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, \quad (2)$$

donde se usa los parámetros y restricciones establecidas en la definición de Riemann-Liouville (1). Además, n es un número entero que satisface la condición $n-1<\alpha<n$ y $f(x)$ cumple que sus derivadas n-ésima y de órdenes inferiores son continuas e integrables. Así, la derivada (2) está definida y es única en el intervalo (a,b) . Por otra parte, esta definición se reduce a una derivada de orden entero n en el límite cuando $\alpha\to n$ (Podlubny, 1998), esto se demuestra al integrar por partes la ecuación que define la derivada de Caputo (2) y calcular el respectivo límite.

2.2 Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias

La transformada de Laplace se define mediante la ecuación:

$$ g(s)=\mathcal{L}[g(t)]\equiv\int_{0}^{\infty}e^{-st}\,g(t)dt, \quad (3)$$

la cual es usada en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales de una manera similar a como se usa en el cálculo tradicional (Arfken, 2001). Es de utilidad recordar la transformada de Laplace de la derivada de orden entero n de una función $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \tag{4}$$

que puede deducirse a partir de la definición (3) de la transformada de Laplace integrando por partes bajo la suposición que dichas integrales existen.

Por otra parte, la ecuación (1) es la derivada n-ésima de una integral fraccional de orden $n-\alpha$, así que se puede utilizar la propiedad (4) para aplicarla en la ecuación (1):

$$\mathcal{L}[\ {}_0D_t^{\alpha} f(t)] = s^n \mathcal{L}[\ {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\ {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t)\ |_{t=0}, \tag{5}$$

de esta manera, la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ con $a = 0$ es (Podlubny, 1998) :

$$\mathcal{L}[\ {}_0D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [\ {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \ \ n-1 \leq \alpha < n. \tag{6}$$

En forma similar, la trasformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo con $a = 0$ es (Podlubny, 1998):

$$\mathcal{L}[\ {}_0^CD_t^{\alpha} f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]}{s^{n-\alpha}} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \ \ n-1 < \alpha < n. \tag{7}$$

Puesto que la fórmula (7) está relacionada directamente con la función $f(t)$ y sus derivadas evaluadas en el límite inferior $t = 0$, la derivada de Caputo resulta en un formalismo más apropiado para definir problemas con condiciones de frontera no nulas.

2.3 Aplicaciones del cálculo fraccionario

Con esto se ha hecho una breve introducción al concepto de derivada fraccionaria, teniendo en cuenta que se ha dejado de lado bastantes acontecimientos relevantes. Por ejemplo, en (Oldham et al, 1974) se hace una recopilación de las primeras aplicaciones relacionadas con la solución de algunas ecuaciones diferenciales fraccionales sencillas como la ecuación integral de Abel y problemas de difusión en el transporte en medios finitos, además de incluir un buen resumen histórico. En (Podlubny, 1998) también se citan algunas aplicaciones en diferentes áreas como viscoelasticidad, electrónica, reacciones químicas y biología. Además existen otros textos con aportes importantes a las ecuaciones diferenciales fraccionales y otro enfocado al uso de la definición de Caputo de derivada fraccionaria (Diethelm, 2010). En el contexto actual existen gran cantidad de publicaciones con aplicaciones del cálculo fraccionario en viscoelasticidad (Schiessel, 1995), mecánica cuántica (Laskin, 2002), biología (Gabriel, 1996), entre otros campos. Además el cálculo fraccionario es una rama de investigación abierta en la que existen diferentes asuntos no resueltos como buscar la interpretación física del uso de derivadas fraccionales para explicar ciertos fenómenos y encontrar una interpretación geométrica de los operadores del cálculo fraccionario.

3. Modelamiento de asfaltos por medio de derivadas fraccionarias

3.1 Reología

La reología es la ciencia que estudia la forma en la que se deforman los materiales y normalmente se restringe al estudio de relaciones fundamentales entre la fuerza aplicada y la deformación que esta causa en un material. El caso más sencillo es la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{8}$$

siendo σ el esfuerzo y ε el cambio relativo de longitud o deformación; la constante de proporcionalidad E es un coeficiente que caracteriza a la elasticidad del material. Por otra parte, en el caso de líquidos, el modelo más sencillo es la ley de Newton de la viscosidad, en la cual el esfuerzo es proporcional a la razón de deformación:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{9}$$

en esta expresión la constante γ describe a la viscosidad del medio. En el modelo de Hooke, la deformación responde inmediatamente al esfuerzo aplicado, mientras que en el caso Newtoniano se tiene en cuenta la rapidez de la deformación. Existe un tercer tipo de material, el material viscoelástico, en el que la deformación se comportará entre un sólido y un líquido. En el caso de materiales complejos, este comportamiento se debe a la reorganización de las partículas que conforman el material. Con el fin de estudiar materiales viscoelásticos, se define el módulo de relajación dividiendo el esfuerzo por la magnitud de la deformación del material, esto es:

$$C(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon} \tag{10}$$

Para deformaciones pequeñas, $C(t)$ es independiente la deformación. Esta dependencia lineal en la relajación del esfuerzo se denomina viscoelasticidad lineal. Para deformaciones mayores, el módulo de relajación ya no es independiente de la deformación, a lo que se le llama viscoelasticidad no lineal. Con el fin de modelar este tipo de relajación, Boltzmann establece que para pequeños cambios en el esfuerzo:

$$d\sigma = Cd\varepsilon = C\frac{d\varepsilon}{dt}dt = C\dot{\varepsilon}dt. \tag{11}$$

Si el módulo de relajación depende del tiempo, se puede obtener el tamaño de la deformación total a partir de la suma de pequeñas deformaciones, esto da como resultado:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{t} C\,(t - t')\dot{\varepsilon}(t')dt'. \tag{12}$$

Esta relación permite modelar la respuesta de diferentes materiales y la forma en la que se encuentra planteada permite, para cierto tipo de funciones $C(t - t')$, establecer conexiones entre el estudio de medios viscoelásticos con la derivada de Caputo del cálculo fraccionario.

3.2 Modelamiento de asfaltos

Los asfaltos son materiales complejos formados por partículas de múltiples tamaños y con deformaciones asociadas a fuerzas externas que incluyen fenómenos cómo anisotropía, viscoelasticidad entre muchas otras. En la referencia (Wang se presenta un tratamiento detallado de las propiedades físicas del asfalto y algunos de los modelos fenomenológicos implementados para su estudio. A pesar de grandes avances en el estudio de asfaltos, el estudio de sus propiedades viscoelásticas y el comportamiento de este material a diferentes escalas es un tema que aún se encuentra en desarrollo. Al respecto, es conveniente incorporar modelos con derivadas fraccionarias ya que estas modelan fenómenos que dependen de la manera en la que se manipuló previamente el material (memoria) y en procesos en los que la distribución del material es inhomogénea pero con un patrón estadístico de leyes de potencias, tal cómo se da en algunos medios porosos. En la referencia (Katicha, 2011) se estudia este modelo para asfaltos:

$$E = \tau^{\beta} \quad {}_{0}^{C}D_{t}^{\beta}\,\varepsilon, \tag{13}$$

donde ${}_{0}^{C}D_{t}^{\beta}\,\varepsilon$ es la derivada de Caputo y τ es una constante de proporcionalidad. El orden β de la derivada es un parámetro asociado a la viscoelasticidad del material (Katicha et al, 2011). Por la naturaleza del asfalto, diversos modelos fraccionarios han sido introducidos con el fin de describir de manera apropiada las propiedades viscoelásticas de este material (Katicha et al, 2014; Sun et al, 2015).

4. Cálculo fraccionario como instrumento pedagógico en ingeniería

A lo largo de este trabajo se presentaron diferentes aspectos introductorios del cálculo fraccionario y su conexión con el modelamiento de sistemas viscoelásticos. Dado la importancia que ha tomado este tipo de tratamientos matemático en diferentes aspectos de la ingeniería como son el estudio de sistemas complejos, control en sistemas, descripción de sistemas viscoelásticos, entre otros, es importante presentar este tipo de técnicas a estudiantes de pregrado en ciencias e ingeniería.

En trabajo de clase con estudiantes de pregrado hemos visto entusiasmo por parte de los estudiantes a aprender estos conceptos. El concepto de derivada fraccionaria es asimilado bien a nivel de una clase de cálculo tradicional, cuando es presentada a manera introductoria. Por otra parte, en el cubrimiento de la temática de transformada de Laplace también se pueden presentar algunos de estos conceptos ya que a mediante esta operación existe una conexión más clara entre las propiedades de la derivada tradicional y la derivada fraccionaria. Por otra parte, el cálculo de las derivadas fraccionales puede ser un buen ejercicio en una clase de métodos numéricos al cubrir la temática de evaluación de integrales.

Finalmente, es importante resaltar que todos estos conocimientos matemáticos presentados a nivel básico como material complementario en diferentes asignaturas puede tener un gran impacto en los estudiantes en sus semestres avanzados ya que mediante estos conceptos pueden tener acceso a métodos, modelos y teorías que describen mejor materiales y en general sistemas complejos como los asfaltos.

5. Referencias

- George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. (2001). Mathematical methods for physicists. Academic press, 5th edition.
- Dumitru Baleanu, José António Tenreiro Machado, and Albert C. J. Luo. (2011). Fractional Dynamics and Control. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Shantanu Das. (2014). Functional Fractional Calculus. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition.
- Kai Diethelm. (2010). The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, volume 2004. Springer Verlag, New York, NY, USA.
- S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. (1996). The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. Physics in medicine and biology, 41(11):2271.
- Samer W. Katicha and Gerardo W. Flintsch. (2011). Use of Fractional Order Viscoelastic Models to Characterize Asphalt Concrete, T&DI Congress 2011: pp. 677-687.

- Samer W. Katicha, Alex K. Apeagyei, Gerardo W. Flintsch, and Amara Loulizi. (2014). Universal linear viscoelastic approximation property of fractional viscoelastic models with application to asphalt concrete. Mechanics of Time-Dependent Materials, 18(3):555–571.
- Nick Laskin. (2002). Fractional Schrödinger equation. Physical Review E, 66(5):056108.
- Keith B Oldham and Jerome Spanier. (1974). The fractional calculus, volume 17. Dover, New York, NY, USA, 1st edition.
- Igor Podlubny. (1998). Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions, volume 198. Academic press, New York, NY, USA.
- H Schiessel, R Metzler, A Blumen, and T Nonnenmacher. (1995). Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. Journal of Physics A: Mathematical and General, 28(23):6567–6584.
- Yiren Sun, Jingyun Chen, and Baoshan Huang. (2015). Characterization of asphalt concrete linear viscoelastic behavior utilizing Havriliak-Negami complex modulus model. Construction and Building Materials, 99:226 – 234.
- V Uchaikin, R Sibatov, and D Uchaikin. (2009). Memory regeneration phenomenon in dielectrics: the fractional derivative approach. Physica Scripta, 2009(T136):014002.
- Linbing Wang. (2011). Mechanics of Asphalt: Microstructure and Micromechanics. The McGraw-Hill Companies.

Sobre los autores

- **David Alejandro Escobar Jiménez**, Licenciado en Matemáticas, actualmente estudiante de Ingeniería Civil en la Universidad Mariana. Email: daviescobar@umariana.edu.co
- **Alejandro Pérez Riascos**. Físico, Magister en Ciencias Físicas, Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente profesor titular en el departamento de Ingeniería Civil en la Universidad Mariana. Email: aperez@umariana.edu.co

---