



**Encuentro Internacional de
Educación en Ingeniería ACOFI**

Innovación en las facultades de ingeniería:
el cambio para la competitividad y la sostenibilidad

Centro de Convenciones Cartagena de Indias

4 al 7 de octubre de 2016



VIBRACIONES ESTRUCTURALES EN PUENTES: MODELAMIENTO UTILIZANDO EL PUENTE PASCO

César Yamid Réndon Hinestroza, Alejandro Pérez Riascos

**Universidad Mariana
Pasto, Colombia**

Resumen

El estudio de estructuras civiles y sus vibraciones constituyen un componente fundamental en la formación de estudiantes en ingeniería civil. En este trabajo se presenta la propuesta pedagógica del programa de ingeniería civil de la Universidad Mariana en la que los estudiantes tienen contacto con temas relacionados con vibraciones de puentes en diferentes etapas de sus estudios de pregrado.

En particular, se presenta una revisión de los métodos matemáticos, iniciando con un sistema de un grado de libertad para llegar a varios grados de libertad, utilizando modelos de vibraciones de puentes y como estos conceptos se ilustran mediante el uso del Equipo de Estructuras Pasco para recreación a escala de puentes y otras estructuras. Finalmente, se discute la manera en la que este esquema pedagógico les permite a los estudiantes entrar en contacto con temas de investigación como son el análisis de señales, la instrumentación y el modelamiento matemático de vibraciones estructurales.

Palabras clave: vibraciones mecánicas, puentes, estructuras civiles

Abstract

The study of civil structures and their vibrations are a fundamental component in the training of students in civil engineering. In this paper, we present the educational strategies introduced in the civil engineering program at the Universidad Mariana, which allows the students to explore topics related with vibrations of bridges at different stages of their undergraduate courses.

In particular, we present a review of mathematical methods. We start with the analysis of a system with one degree of freedom to reach several degrees of freedom. Then we use models for vibrations of bridges and how these concepts are illustrated by the set of structures Pasco to recreate bridges and other structures. Finally, we discuss the way in which this educational scheme allows students to explore research topics such as signal analysis, instrumentation and mathematical modeling of structural vibrations.

Keywords: mechanical vibrations, bridges, civil structures

1. Introducción

En este trabajo se presenta de manera introductoria algunas herramientas matemáticas asociadas con el estudio de vibraciones de puentes. Una vez establecidos estos modelos se describe el equipo de estructuras Pasco en el que se pueden construir representaciones de edificios y puentes. La presentación del trabajo resalta el tipo de prácticas que pueden realizar los estudiantes con el fin de profundizar en los conocimientos adquiridos en los primeros semestres de la carrera de ingeniería civil mediante la integración de las asignaturas de álgebra lineal, física de vibraciones, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos.

2. Modelo matemático

Con el fin de presentar al estudiante una evolución de una estructura vista desde un sistema de un grado de libertad hasta un sistema de muchos grados de libertad se comienza con un estudio básico pasando a estructuras más complejas hasta llegar a un puente colgante, el objetivo es que se observe la evolución de la ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia natural con el aumento de los grados de libertad (GDL).

2.1 Sistema física masa-resorte con y sin amortiguamiento

Con el fin de introducir algunos de los conceptos relacionados con vibraciones, en esta sección se analiza un sistema masa resorte con una fuerza externa $p(t)$, una masa m y con una constante de elasticidad k , también se incluye un el coeficiente de amortiguamiento c . La ecuación diferencial para el movimiento se obtiene a partir de la segunda ley de Newton:

$$\sum f(x) = ma \tag{1}$$

Las fuerzas que actúan son: la fuerza de restitución del resorte que va en contra del movimiento y la excitación al sistema $P(t)$ que puede ser una fuerza variable o constante en el tiempo, al aplicar la ecuación (1) que resulta en:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = P(t) \tag{2}$$

Y en el caso de que el sistema tenga amortiguamiento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = P(t) \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) son ecuaciones diferenciales de segundo orden (Takeuchi, 1975) para un sistema con y sin amortiguamiento, cuya frecuencia natural es:

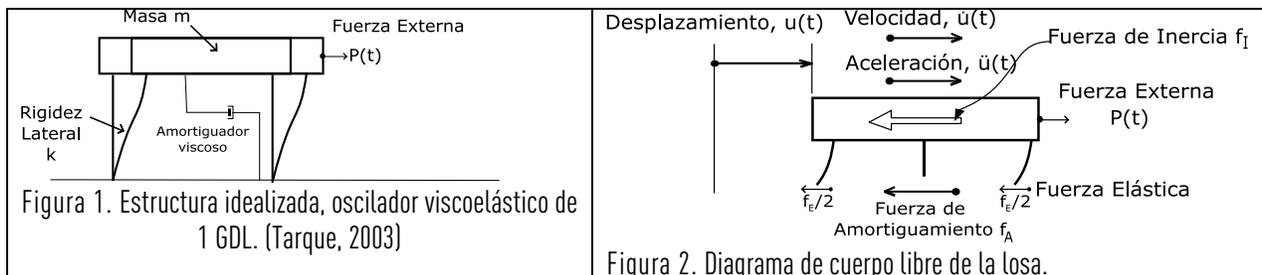
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{4}$$

2.2 Estructuras con uno y varios grados de libertad

El oscilador de un grado de libertad representado en una estructura de un piso es mostrado en la Figura 1 donde se representa una losa superior de masa m apoyada en columnas muy livianas con rigidez k sometida a una excitación $P(t)$. La respuesta de la estructura da como resultado una variación del desplazamiento lateral u , que en el caso del muelle en la sección (a) es el eje x . En la Figura 2 se muestra la idealización de la estructura de un piso con sus parámetros importantes: masa m , rigidez k , amortiguamiento c , y fuerza de excitación externa $P(t)$.

Luego de un tratamiento similar al del sistema masa resorte se puede llegar a la ecuación:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{du(t)}{dt} + ku = P(t) \tag{5}$$



Si ahora la estructura tiene más de un piso se toma cada piso como un sistema masa resorte, un edificio puede ser representado como una sola columna con masas concentradas a la altura de los pisos como se muestra en la Figura 3 donde se indican las fuerzas que actúan y los desplazamientos horizontales sobre ella.

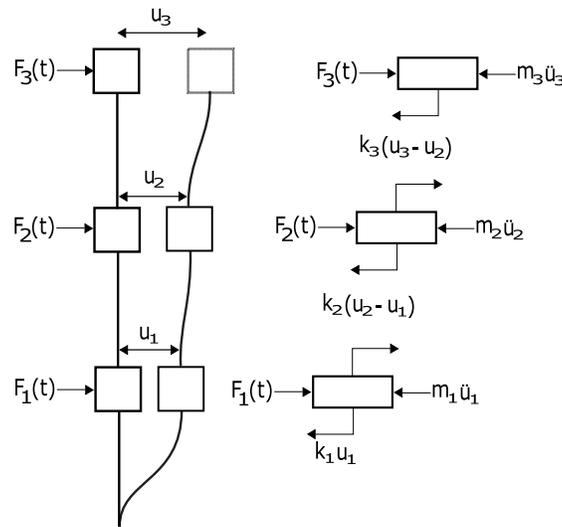


Figura 3. Fuerzas que actúan y desplazamientos horizontales en un edificio de 3 pisos.

De la anterior representación de un edificio simple de 3 pisos se tiene que las ecuaciones de movimiento mostradas en la ecuación (5) obtenidas de igualar las fuerzas que actúan a cero.

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - (u_2 - u_1) - F_1(t) &= 0, \\
 m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) - F_2(t) &= 0, \\
 m_3 \ddot{u}_3 + k_3(u_3 - u_2) - F_3(t) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

La ecuación (6) pueden reescribirse de forma matricial así:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}
 \tag{7}$$

Donde M es una matriz de masa diagonal y K una matriz de rigidez dada por elementos correspondientes a los coeficientes de rigidez. Los vectores $\{u\}$, $\{\ddot{u}\}$ y $\{F\}$ corresponden al desplazamiento, aceleración (para la segunda derivada del espacio respecto al tiempo ahora se usa la notación \ddot{u}) y fuerza externa respectivamente.

Al adicionar un sistema de amortiguamiento actuando en los nodos la ecuación de movimiento es modificada incluyendo ahora una matriz de amortiguamiento en la expresión dando como resultado:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}
 \tag{8}$$

Donde $\{\dot{u}\}$ es el vector de velocidad absoluta de los nodos. Para determinar la frecuencia natural de esta estructura usamos la ecuación (8) con $\{F\} = 0$

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (9)$$

La ecuación (9) es una ecuación diferencial homogénea de segundo grado (Takeuchi, 1975) cuya solución es

$$\{u\} = \{a_n\} \text{sen}(\omega_n t - \alpha_n) \quad (10)$$

Y tiene por segunda derivada a

$$\{\ddot{u}\} = -\{a_n\}\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t - \alpha_n) \quad (11)$$

Reemplazando (10) y (11) en (9) se obtiene

$$([K] - \omega_n^2 [M])\{u\} = 0 \quad (12)$$

La ecuación (12) es fundamental en el estudio de vibraciones estructurales y el modelamiento de diferentes estructuras (Tarque, 2003). A partir de la elección apropiada de los coeficientes en las matrices $[K]$ y $[M]$ se pueden encontrar las frecuencias de oscilación así como la forma de la onda en cada una de estas frecuencias. En este tipo de análisis los estudiantes deben aplicar técnicas aprendidas en cursos de métodos numéricos y álgebra lineal. Con el fin de acercar a los estudiantes a este formalismo y la física de las vibraciones resulta conveniente modelar estas estructuras con elementos simples, esto se hace por medio del equipo de estructuras Pasco.

3. Equipo PASCO para el modelamiento de estructuras

El análisis de vibraciones de estructuras civiles es complejo y requiere del dominio de múltiples conocimientos en ingeniería, física, matemáticas, instrumentación y programación. De esta manera, es importante introducir a los estudiantes en estos conocimientos en diferentes etapas de su formación académica tanto en la parte teórica relacionada con vibraciones y ondas, así como en la parte experimental en la que se cubren aspectos como la instrumentación y el procesamiento señales. En esta sección describimos el equipo Pasco que permite a los estudiantes trabajar con un modelo simple con el que se pueden adquirir datos para explorar la forma en la que vibran estructuras construidas a nivel de prácticas de laboratorio o cómo proyectos en los que se pueden integrar diferentes asignaturas del programa de Ingeniería Civil.

3.1 Elementos del equipo

El equipo Pasco para el análisis de estructuras ofrece diferentes tipos de elementos para la construcción de modelos que capturan las características básicas en el análisis de estructuras como viviendas y puentes. Contiene elementos que pueden ser utilizados como columnas y otros elementos estructurales para unir de diferentes maneras estas componentes. Adicional a lo mencionado anteriormente, el equipo cuenta con

diversos sensores que registran la carga en una parte particular de la estructura, la deflexión de un elemento o su aceleración registrada mediante un acelerómetro. La adquisición de estos datos se realiza mediante el equipo Xplorer GLX, que permite almacenar y visualizar en tiempo real los datos de 4 sensores de manera simultánea.

3.2 Vibraciones con el equipo de estructuras

Con el fin de analizar vibraciones estructurales, se utiliza un generador de ondas mecánicas alimentado por un generador de señales sinusoidales que permite acoplar la estructura con una vibración externa a la que es posible controlar su amplitud y su frecuencia. Con el fin de registrar la aceleración de diferentes partes de la estructura, se utiliza un acelerómetro que puede ser ubicado en diversos lugares de interés. En la Figura 4 se presentan tres configuraciones del equipo utilizado para medir vibraciones que modelan lo que podría ocurrir en una estructura con uno, dos o tres pisos. En este caso el generador de ondas mecánicas aplica una fuerza oscilatoria en una de las bases, las aceleraciones en la misma dirección de la fuerza externa son registradas por el acelerómetro.

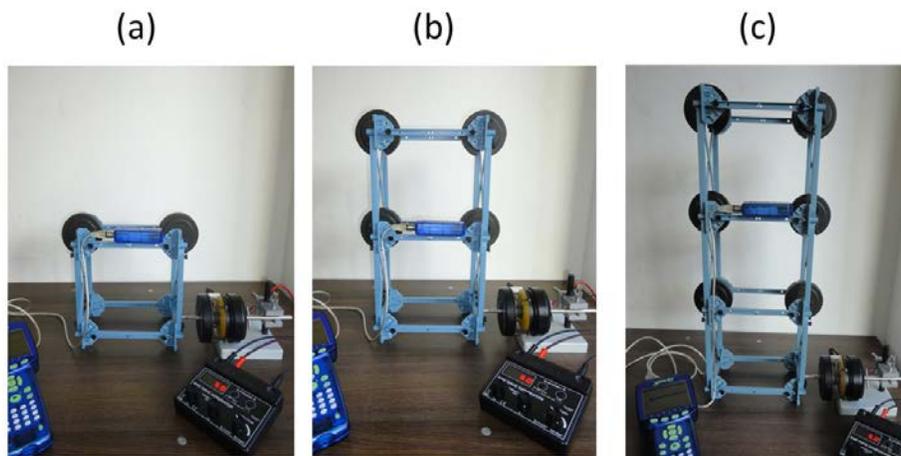


Figura 4. Estructuras realizadas con el equipo Pasco. En este caso buscamos recrear en un modelo sencillo una construcción con: (a) un piso, (b) dos pisos, (c) tres pisos. En las imágenes se muestra la ubicación del sensor de aceleración, el equipo de adquisición de datos y el generador de ondas mecánicas fijado en la parte derecha de la base. En cada nivel se ha incluido una masa total de 1 kilogramo.

En la Figura 5, se presentan algunos de los resultados obtenidos para oscilaciones de una estructura con tres niveles. En 5(a) se muestra el montaje utilizado, en el que en cada nivel se suspenden masas de 0.5 kg, haciendo que cada piso tenga un kilogramo. En todo este análisis el acelerómetro se encuentra ubicado en la base del tercer nivel. En la (b) se observa la amplitud de la aceleración en función de la frecuencia, los datos son obtenidos mediante la adquisición de datos durante 10 segundos con el generador de onda sinusoidal a una frecuencia n y una amplitud determinada; el rango de frecuencias n cubierto se encuentra entre 3 Hz y 100Hz. En estos resultados es claro que la estructura responde con mayor vibración en la posición del acelerómetro en

determinadas frecuencias, una búsqueda más detallada muestra que estos máximos en la aceleración se presentan a las frecuencias $n = 4.3, 14.3$ y 22.3 Hz. En la figura (c) se presentan los resultados de la aceleración en función del tiempo para estas frecuencias y en (d) se obtiene su respectiva transformada rápida de Fourier con el fin de encontrar las frecuencias de vibración f para cada una de las componentes de la señal.

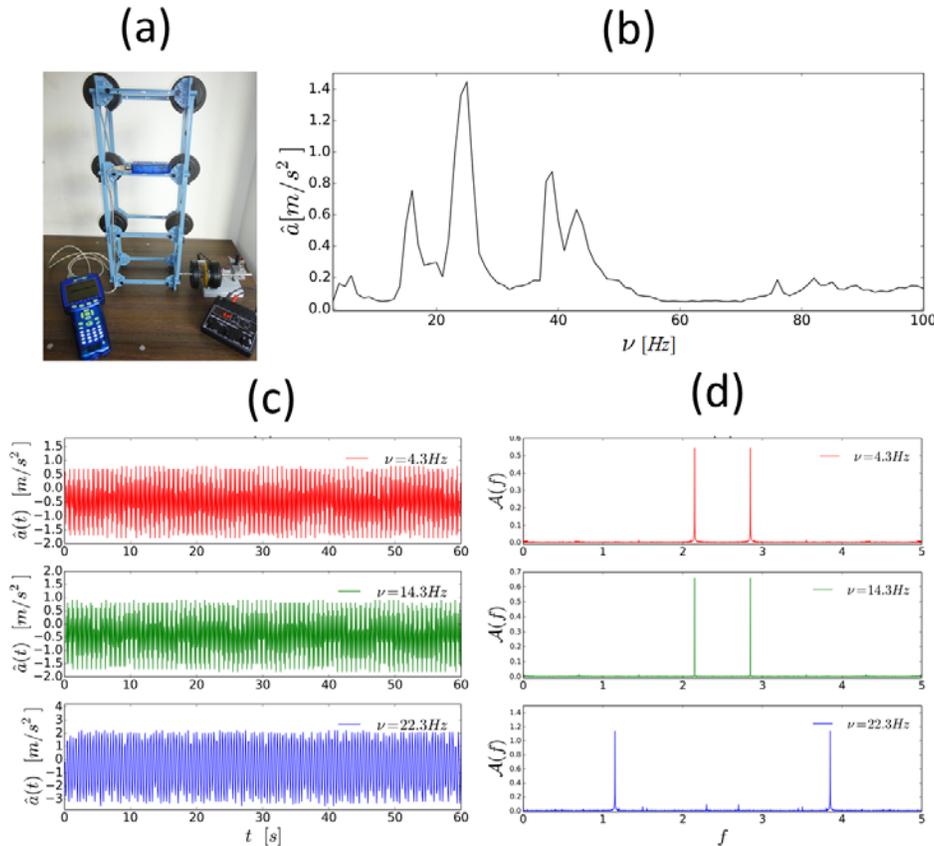


Figura 5. Análisis de señales para las vibraciones de la estructura de tres niveles mostrada en (a). En (b) se presentan los resultados asociados a la amplitud de la aceleración en función de la frecuencia n de la oscilación aplicada en la base de la estructura. En (c) se presenta la aceleración en función del tiempo para las oscilaciones a tres frecuencias n fijas junto con sus respectivas componentes espectrales presentadas en (d) y obtenidas a mediante la transformada rápida de Fourier de las señales.

A nivel de recurso pedagógico, mediante este equipo se puede familiarizar a los estudiantes con conceptos importantes de física que a nivel de aula de clase son solo abstractos pero que con este montaje adquieren mucho sentido en un experimento que captura el interés de los estudiantes. A nivel de física, se pueden ilustrar los conceptos de resonancia que se da justo en las frecuencias en los que la estructura recibe mayor energía para ser utilizada en vibración, también se pueden ilustrar fenómenos de modulación que son evidentes a determinadas frecuencias.

Por otra parte, los estudiantes pueden hacer su propia toma de datos y analizarlos mediante software especializado. Al respecto, como ejercicio de clase de métodos numéricos se ha aplicado la Transformada Rápida de Fourier, esta operación permite obtener el espectro de frecuencias de la señal registrada en la toma de

datos para la aceleración en función del tiempo (Chapra, 2005). En la Figura 5(d) se observa cómo en los diferentes estados con mayor vibración, las frecuencias características de la señal presentan dos frecuencias muy localizadas, son típicas de estas estructuras y dependen de las masas en cada uno de los niveles, de las propiedades elásticas del material utilizado así como de sus dimensiones.

En las prácticas realizadas con este tipo de montaje se ha observado un gran interés y motivación de los estudiantes para entender este fenómeno. Por ejemplo, algunos estudiantes identifican frecuencias de resonancia y ven como estas son diferentes al cambiar las masas en cada uno de los niveles. Por otra parte, entender en detalle las frecuencias características de este sistema junto con una teoría de física que respalde estos resultados puede ser parte de un tema avanzado para investigación.

3.3 Vibraciones de un puente

El montaje anterior para la vibración de casas con uno, dos y tres pisos, es sencillo y permite a los estudiantes familiarizarse con el equipo, su manejo y el análisis de las señales obtenidas. Una vez logrado esto se pueden explorar estructuras más complejas como son los puentes. El equipo PASCO permite construir diferentes tipos de puentes, en la Figura 6 se presenta el montaje para el modelamiento de un puente suspendido.

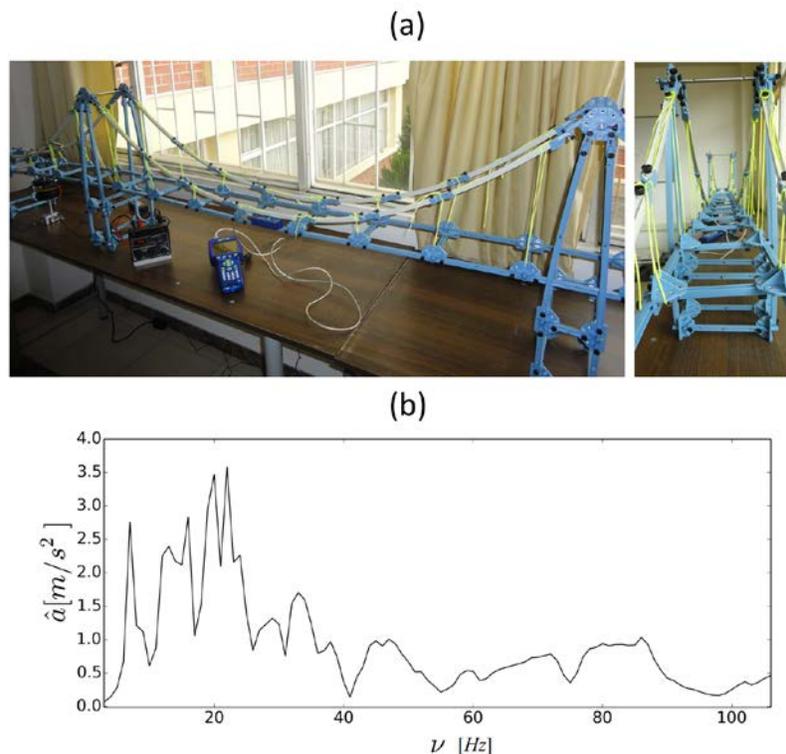


Figura 6. Puente suspendido construido con el equipo de estructuras PASCO. (a) En la imagen derecha se observa el puente en el que en uno de sus extremos se ubica el generador de ondas mecánicas, el acelerómetro se encuentra ubicado en la mitad de la parte suspendida. En (b) se presentan los resultados asociados a la amplitud de la aceleración en función de la frecuencia n de la fuerza aplicada en la base de la estructura.

En este montaje los estudiantes pueden diseñar su propio proyecto de investigación en el que se pueden integrar las asignaturas de álgebra lineal, física de vibraciones, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos. El esquema de adquisición de datos es similar a lo presentado en la Figura 5. Sin embargo, en este caso los espectros de frecuencias contienen muchas más componentes debido a la cantidad de elementos que se encuentran vibrando y a sus posibles modos de oscilación. En esta etapa los estudiantes ya han explorado diferentes conocimientos y van a entender mucho mejor los fundamentos detrás del análisis de estas estructuras. Los conocimientos adquiridos mediante estas prácticas son puestos a prueba en una toma de datos en un puente real; esta práctica la hemos realizado en el puente Juananmbú ubicado a 50 kilómetros de la ciudad de Pasto con estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería Civil. En un futuro buscamos establecer un curso electivo orientado a señales que cubra temáticas especializadas como son vibraciones de estructuras, instrumentación y tratamiento de errores, tratamiento de señales y prácticas de auscultación de puentes.

4. Referencias

- Takeuchi, Y., Ramírez Montufar, A. y Ruiz Salguero, C. *Ecuaciones diferenciales*. México: Limusa. 1975.
- Tarque Ruiz N, Loaiza Fuentes C. Análisis Sísmico de Edificios. Adaptación de *Dynamics of Structures: Theory and Applications of Anil K. Chopra*. XVI Curso Internacional de Estructuras. 2003.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill Higher Education, 2005.

Sobre los autores

- **César Yamid Rendón Hinestroza**. Ingeniero Físico, Magister en Astrofísica, Física de Partículas y Cosmología de la Universidad de Barcelona. Actualmente profesor tiempo completo en el departamento de Ingeniería Civil en la Universidad Mariana. Email: crendon@umariana.edu.co
- **Alejandro Pérez Riascos**. Físico, Magister en Ciencias Físicas, Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente profesor tiempo completo en el departamento de Ingeniería Civil en la Universidad Mariana. Email: aperez@umariana.edu.co

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.

Copyright © 2016 Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI)