



Encuentro Internacional de
Educación en Ingeniería ACOFI

**GESTIÓN, CALIDAD Y DESARROLLO
EN LAS FACULTADES DE INGENIERÍA**

Cartagena de Indias, Colombia
18 al 21 de septiembre de 2018



UNA EXPERIENCIA PARA LA ENSEÑA DEL LUGAR DE LAS RAÍCES Y EL DIAGRAMA DE BODE

Jaiber Evelio Cardona Aristizábal

**Universidad del Quindío
Armenia, Colombia**

Resumen

El lugar de las raíces y el diagrama de Bode, aplicados al control, son representaciones de sistemas lineales en lazo abierto que permiten establecer características del comportamiento en lazo cerrado. Estas dos herramientas permiten el diseño de controladores definiendo comportamientos deseados en el dominio del tiempo o de la frecuencia. La facilidad con que las herramientas computacionales permiten dibujar el lugar de las raíces o el diagrama de Bode, hace que los estudiantes utilicen las funciones específicas para dibujarlas sin interesarse por entender como es la construcción de las gráficas. Si bien las herramientas computacionales facilitan el diseño de controladores, no se debe dejar de lado el entendimiento sobre el origen de las gráficas usadas para el diseño de controladores. En este artículo se propone una estrategia para dibujar, a través de una estrategia participativa, el lugar de las raíces y el diagrama de Bode, permitiendo un entendimiento sobre la construcción de dichas gráficas. La estrategia grupal permite, a través de la unión de los resultados obtenidos de otros estudiantes, entender la construcción de dichos diagramas. Como a cada estudiante se le asigna una parte de la gráfica, el estudiante puede evidenciar si cometió algún error en el cálculo al no encontrar correspondencia entre los resultados propios y los encontrados por los compañeros. La metodología fue aplicada en el espacio académico Introducción al Control del Programa de Ingeniería Electrónica. Además del entendimiento de la construcción del lugar de las raíces, la estrategia resultó útil para introducir el diseño de controladores por dicho método. En cuanto al diagrama de Bode, permitió además introducir los conceptos de margen de fase y de ganancia al encontrarlos en la gráfica propuesta.

Palabras clave: lugar de las raíces; diagrama de bode; control; educación en ingeniería

Abstract

In the context of control, root locus and Bode plots represent open loop systems to establish closed loop characteristics. These two tools are used for control design with specifications in both, the time domain and the frequency domain. Due to It is easy to draw the root locus or Bode plots in the computer, the students frequently do not care about understand how the construction of the graphs is. Although computer tools facilitate the design of controllers, the understanding of the origin of the graphics used for the design of controllers should not be ignored. In this article we propose a strategy to draw, through a participatory strategy, the root locus and the Bode plot, allowing an understanding on the construction of these graphs. The group strategy allows, through the union of the results obtained from other students, to understand the construction of said diagrams. As each student is assigned a part of the graph, the student can identify an error in the calculation by not finding correspondence between their own results and those results found by the classmates. The methodology was applied in the academic space Introduction to control system, in the Electronic Engineering Program. In addition to the understanding of the construction of the root locus, the strategy was useful to introduce the design of controllers by this method. As for the Bode diagram, it also allowed introducing the concepts of phase margin and gain when finding them in the proposed graph.

Keywords: root locus; bode plots; control; engineering education

1. Introducción

El lugar de las raíces representa la ubicación de los polos de lazo cerrado cuando cambia la ganancia en lazo abierto (Ogata, 2010), dicho diagrama parte de los polos y llega a los ceros. Si algún polo de lazo cerrado se encuentra ubicado a la derecha del plano imaginario al usar Laplace entonces el sistema es inestable, así mismo, el sistema es inestable si se encuentra algún polo por fuera del círculo unitario al usar transformada Z. Si todos los polos se encuentran en la parte estable, sus ubicaciones nos indican características como sobreimpulso y tiempo de establecimiento. En el diseño de controladores se puede modificar el lugar de las raíces para que pase por unos polos específicos de acuerdo a características deseadas, siendo las más usadas el sobreimpulso y tiempo de establecimiento.

El diagrama de Bode representa el comportamiento en frecuencia de un sistema lineal invariante en el tiempo, permitiendo establecer las frecuencias que amplifica y las que atenúa; cuando el sistema es de fase mínima, es decir que los polos están ubicados en la parte izquierda del plano imaginario cuando se usa Laplace, entonces el margen de fase y de ganancia nos da información acerca de la estabilidad del sistema. El diseño de controladores en el dominio de la frecuencia parte de definir unas condiciones de margen de fase y de ganancia mínimas esperadas; dicho diseño se realiza partiendo del diagrama de Bode (Ogata, 2010).

Tanto el lugar de las raíces como el diagrama de Bode pueden ser dibujados directamente de la función de transferencia de lazo abierto por medio de herramientas computacionales, lo cual facilita su uso, sin embargo, para efectos de enseñanza, dicha facilidad ocasiona que muchos

estudiantes no sean conscientes de como dichas gráficas son obtenidas y se limiten a usarlas sin conocer realmente su origen.

En este artículo se propone una metodología para explicar la forma de construir un lugar de las raíces o un diagrama de Bode a partir de una estrategia colaborativa donde cada estudiante ubica un punto en la gráfica, la unión de dichos puntos permitiría entonces encontrar la gráfica final resultante.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta la propuesta para realizar los diagramas, en el capítulo 3 se muestra la forma en que el procedimiento fue aplicado en el espacio académico de introducción al control del programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad del Quindío, en el capítulo 4 se mencionan las conclusiones y en el capítulo 5 las referencias.

2. Propuesta

La metodología planteada para dibujar el lugar de las raíces es la siguiente:

1. Se escoge una función de transferencia a la cual se le va a graficar el lugar de las raíces.
2. Se muestra el equivalente en lazo cerrado resaltando la K que se debe variar para encontrar el lugar de las raíces.
3. A cada estudiante se le asigna un valor de K diferente teniendo en cuenta valores que permitan dibujar bien el lugar de las raíces, con dicho valor cada estudiante debe encontrar los polos del sistema en lazo cerrado.
4. En el tablero el profesor dibuja grande un plano imaginario y marca el cero y los dos polos del sistema y cada estudiante debe marcar con un punto en el plano imaginario, cada uno de los polos de acuerdo al punto de K que le fue asignado.
5. Finalmente se unen los puntos y resulta el lugar de las raíces, esto permite enseñar como la variación de K va configurando el lugar de las raíces.

Al dibujar cada punto de esta forma un estudiante puede encontrar que ha realizado mal los cálculos si su punto difiere de la forma general, permitiendo calcular de nuevo los puntos y ajustando, así mismo se puede preguntar por la K que hace inestable el sistema si se cruza por el eje imaginario en el plano de Laplace o si se sale del círculo unitario en el plano Z . aunque posiblemente no se tengan los valores límites exactos de K para la inestabilidad, se puede acotar con los puntos de los estudiantes unidos desde la parte estable a la inestable.

Un procedimiento similar se usa para el diagrama de Bode, en primera instancia se debe explicar cómo la magnitud y ángulo debida a una frecuencia ω , se puede encontrar a partir del ángulo y magnitud del vector que une la distancia de cada cero o polo al punto ω en el eje imaginario.

Posterior a la explicación se dibuja el diagrama de Bode de acuerdo a lo siguiente:

1. Se escoge una función de transferencia que puede ser de orden superior con ceros y polos.
2. A cada estudiante se le asigna un valor de W diferente teniendo en cuenta valores que permitan dibujar bien el diagrama de Bode, los valores de W deben ser distribuidos teniendo en cuenta una escala logarítmica. Con estos valores de W cada estudiante debe calcular la magnitud y ángulo encontrados.
3. En el tablero el profesor dibuja grande los dos planos del diagrama de Bode, uno para la magnitud y otro para la fase con escala logarítmica en el eje X , correspondiente al valor de la frecuencia. Para el eje Y dibuja el valor adecuado en decibelios en el plano superior y el valor adecuado en grados en el plano inferior.
4. Cada estudiante dibuja el punto correspondiente tanto en la magnitud como en la fase.

Al comparar el punto dibujado por un estudiante con los puntos dibujados por sus compañeros, se puede determinar que realizó un mal cálculo si el punto se encuentra fuera de la curva establecida por los otros, permitiendo realizar de nuevo los cálculos y ajustar.

En esta gráfica se debe asegurar que los valores de W distribuidos coincidan con el cálculo del margen de fase y margen de ganancia, permitiendo explicar también este punto.

Esta metodología puede ser también aplicada en la gráfica de Bode de una función de transferencia en Z , donde posiblemente es más difícil para un estudiante entender su construcción.

3. Pruebas realizadas

La metodología propuesta fue aplicada en el curso introducción al control del Programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad del Quindío; para el lugar de las raíces se escogió la función dada por (3.1)

$$G(s) = \frac{0.1615s+0.2422}{s^2+2s+1} \quad (3.1)$$

La función es escogida de segundo orden debido a la facilidad para encontrar las raíces con una calculadora sencilla.

El lugar de las raíces viene dado por graficar en el plano complejo las raíces obtenidas al variar el valor de K en la ecuación dada por (3.2)

$$0 = K(0.1615s + 0.2422) + s^2 + 2s + 1 \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta que el curso era de 25 personas se pidió que se numeraran del 1 al 25 y el número asignado es el valor de K que debe usar.

Con el valor de K , el estudiante calcula los polos dados por (3.2) y se solicita que, aquellos que tengan el valor calculado, dibuje los puntos correspondientes en el plano complejo establecido en el tablero. Los puntos resultantes deben dar la distribución dada por la figura 3.1.

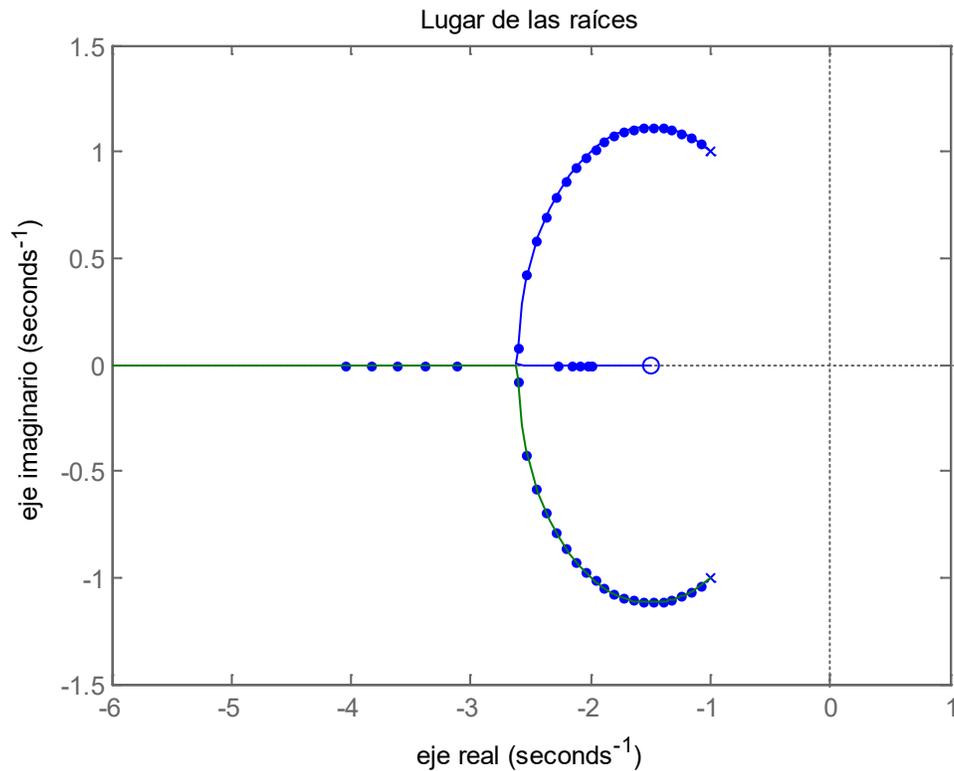


Figura 3.1. Distribución de los puntos para los diferentes valores de K

Debido a que los puntos marcan una curva establecida, un estudiante puede encontrar que ha calculado erróneamente los polos si no están dentro de la curva establecida por los puntos de sus compañeros.

Para la gráfica de Bode se usó la función dada por (3.3)

$$G(s) = \frac{2}{s(s^2+0.7s+1)} \quad (3.3)$$

Dicha función expresada con los polos se puede ver como en (3.4)

$$G(s) = \frac{2}{s(s+0.35+0.9367i)(s+0.35-0.9367i)} \quad (3.4)$$

Se debe explicar que un punto en la gráfica de Bode se puede obtener con la magnitud y ángulo calculada con los vectores desde los ceros y polos del sistema hasta valores complejos con solo componente imaginaria, es decir, moviéndose sobre el eje Y del plano complejo como muestra la figura 3.2

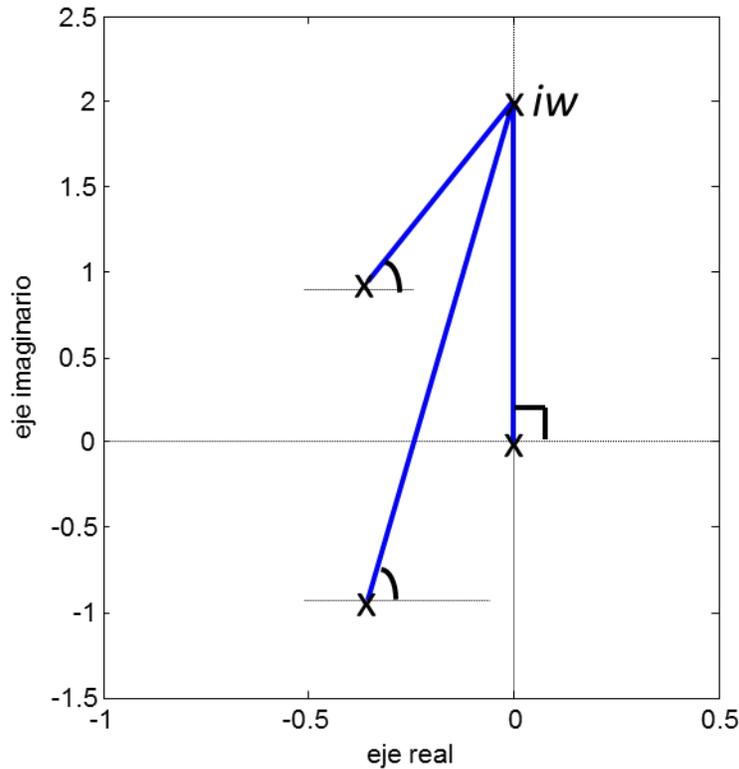


Figura 3.2. Vectores desde los polos y ceros del sistema hasta un valor en el eje Y del plano complejo

La magnitud se calcula entonces como la multiplicación de la ganancia del sistema con las magnitudes de los vectores asociados a los ceros, dividido entre las magnitudes de los vectores asociados a los polos, para la función ejemplo se muestra en (3.5)

$$M = |G(iw)| = \frac{2}{|iw|(iw+0.35+0.9367i)|(iw+0.35-0.9367i)} \quad (3.5)$$

Debe aclararse que la magnitud debe darse en db, es decir debe aplicarse la fórmula (3.6)

$$M_{db} = 20 \log_{10} M \quad (3.6)$$

Así mismo el ángulo se calcula como la suma de los ángulos de los vectores asociados a los ceros, restando los vectores asociados a los polos, para el ejemplo se muestra en (3.7)

$$G(iw) = -iw - (iw + 0.35 + 0.9367i) - (iw + 0.35 - 0.9367i) \quad (3.7)$$

A los estudiantes se les pidió que se numeraran de nuevo de 1 a 25 y, debido a que el eje X de la gráfica de Bode tiene distribución logarítmica, se les asignó un valor de w como una potencia dada por (3.8)

$$w = 0.1 * 10^{(n/10)} \quad (3.8)$$

Donde n es el valor asignado a un estudiante

Con dichos valores puestos sobre el eje Y del plano complejo, cada estudiante encuentra el valor de la magnitud y el ángulo. Los puntos distribuidos se muestran en la figura 3.3

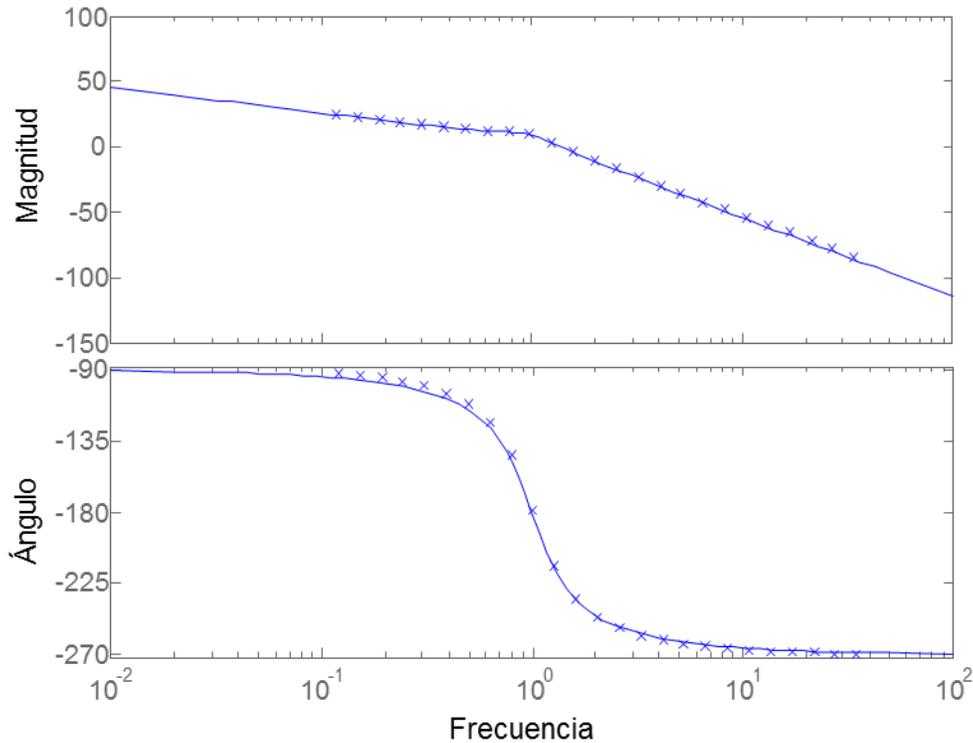


Figura 3.3 Puntos asignados para la gráfica qde Bode.

En este caso, para poder dibujar los puntos en el tablero, el profesor debe haber dibujado previamente la escala logarítmica en el eje X.

Igual que en el caso del lugar de las raíces, un estudiante puede darse cuenta de un error si encuentra que los puntos dibujados no están acordes a los dibujados por sus compañeros.

4. Resultados

El procedimiento fue explicado y cada estudiante encontró los puntos de acuerdo al valor de K o al valor de W, en el caso del lugar de las raíces o el diagrama de Bode, respectivamente.

El hecho de que cada estudiante tuviera un punto diferente asignado y que tuviera que realizar su aporte a la construcción colectiva de la gráfica, incentivaba a los estudiantes a entender los procedimientos para un cálculo adecuado.

Algunos estudiantes se mostraban inseguros sobre los resultados obtenidos y explicaban al profesor el procedimiento realizado para verificar que estuviera bien desarrollado, en este sentido algunos mostraban un entendimiento adecuado y otros tenían que pedir asesoría que era suplida en algunas ocasiones por el profesor y, en la mayoría de los casos, por sus propios compañeros.

Si bien se debió realizar una motivación mayor para que se dibujaran los primeros puntos, los puntos faltantes fueron dibujados con mayor afluencia. Debido a que los puntos iban marcando la forma de la gráfica, algunos que habían calculado erróneamente el punto que le correspondía veían que sus puntos estaban por fuera de los ya dibujados, por lo cual revisaban y corregían los cálculos realizados.

En sesiones posteriores, donde se explicaba el diseño de compensadores por lugar de las raíces, se hacía referencia a la forma como se construyó el diagrama del lugar de las raíces y se relacionaba en lo concerniente a la forma de construir los vectores para luego aplicar el criterio de magnitud y ángulo.

5. Conclusiones

En este trabajo se presenta una metodología que pretende enseñar la forma de construcción de dos diagramas importantes en control: el lugar de las raíces y el diagrama de Bode. La metodología fue aplicada con éxito en el curso de introducción al control permitiendo que, de manera colectiva, se dibujaran los diagramas a través de aportes individuales. La comprensión sobre cómo se construye el diagrama se da al realizar un aporte individual y relacionar dicho aporte con los presentados por los otros estudiantes.

Debido a las herramientas computacionales disponibles para el diseño de controladores, en la práctica no es necesario dibujar manualmente los diagramas aquí presentados, sin embargo, es importante entender cómo se originan dichos diagramas para afianzar los conceptos relacionados. En este sentido, la metodología propuesta permite que los estudiantes entiendan el significado del lugar de las raíces y del diagrama de Bode.

Aunque la propuesta aquí planteada fue realizada para funciones de transferencia expresadas en Laplace, se puede realizar un procedimiento equivalente para funciones de transferencia expresadas en transformada Z.

6. Referencias

- Ogata, K. (2010). Ingeniería de Control Moderna, Pearson Educación, Madrid. pag 269-302.

Sobre el autor

- **Jaiber Evelio Cardona Aristizábal:** Ingeniero Electrónico, Magister en Automática y Doctor en Ingeniería de la Universidad del Valle. Profesor asistente de la Universidad del Quindío. Email: jaibercardona@uniquindio.edu.co

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.

Copyright © 2018 Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI)